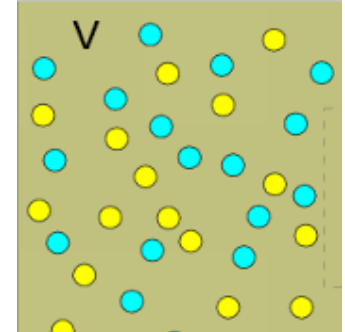


Compensation conditionnelle - synthèse

■ Principales relations (jusqu'à présent):

1. Mesures: $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$ leur modèle stochastique: $\mathbf{P} = \mathbf{Q}_{\ell\ell}^{-1}$
2. Conditions: $f_k(\ell_1 - v_1, \ell_2 - v_2, \dots, \ell_n - v_n) = 0 \quad k = 1, \dots, r$
3. Ecartes de fermeture: $\mathbf{w} = \mathbf{f}(\ell)$
4. Les conditions linéaires (linéarisés): $\mathbf{B} = \frac{\partial f(\ell)}{\partial \ell}$
5. Les résidus compensés: $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{Q}_{\ell\ell} \mathbf{B}^T (\mathbf{B} \mathbf{Q}_{\ell\ell} \mathbf{B}^T)^{-1} \cdot \mathbf{w}$
6. Les observations compensées: $\hat{\ell} = \ell - \hat{\mathbf{v}}$
7. Contrôle: $\mathbf{f}(\hat{\ell}) = 0$

Exo 6: Gaz parfait - avec élégance!



- Données de l'exercice précédent
- Compensation conditionelles avec 2 états $\rightarrow r = 1$

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \quad \text{pourquois pas ?} \quad P_1 \cdot V_1 \cdot T_2 = P_2 \cdot V_2 \cdot T_1$$

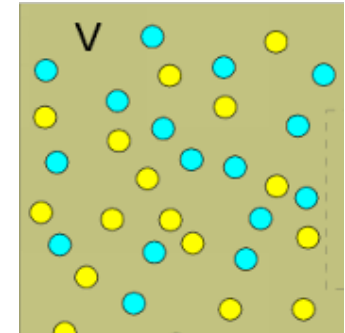
- Gaz parfait: $\check{\ell}_{P_1} \cdot \check{\ell}_{V_1} \cdot \check{\ell}_{T_2} - \check{\ell}_{P_2} \cdot \check{\ell}_{V_2} \cdot \check{\ell}_{T_1} = 0$ $\hat{\ell}_{P_1} \cdot \hat{\ell}_{V_1} \cdot \hat{\ell}_{T_2} - \hat{\ell}_{V_2} \cdot \hat{\ell}_{P_2} \cdot \hat{\ell}_{T_1} = 0$
- Gaz réel: $\ell_{P_1} \cdot \ell_{V_1} \cdot \ell_{T_2} - \ell_{P_2} \cdot \ell_{V_2} \cdot \ell_{T_1} = w_1$
- Gaz corrigé: $(\ell_{P_1} - v_{P_1})(\ell_{V_1} - v_{V_1})(\ell_{T_2} - v_{T_2}) - (\ell_{P_2} - v_{P_2})(\ell_{V_2} - v_{V_2})(\ell_{T_1} - v_{T_1}) = 0$

$$\underbrace{\ell_{P_1} \ell_{V_1} \ell_{T_2} - \ell_{V_2} \ell_{P_2} \ell_{T_1}}_w + \underbrace{\ell_{V_1} \ell_{T_2} v_{P_1}}_{\partial f / \partial \ell_{P_1}} + \cdots - \underbrace{\ell_{P_2} \ell_{T_1} v_{V_2}}_{\partial f / \partial \ell_{V_2}} + \underbrace{\ell_{T_1} \ell_{V_1} v_{T_2}}_{\partial f / \partial \ell_{T_2}} = 0$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} +\ell_{V_1} \ell_{T_2} & +\ell_{P_1} \ell_{T_2} & -\ell_{P_2} \ell_{V_2} - \ell_{V_2} \ell_{T_1} & -\ell_{P_2} \ell_{T_1} & +\ell_{P_1} \ell_{V_1} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{v}$$

$$\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} v_{P_1} & v_{V_1} & v_{T_1} & v_{P_2} & v_{V_2} & v_{T_2} \end{bmatrix}$$

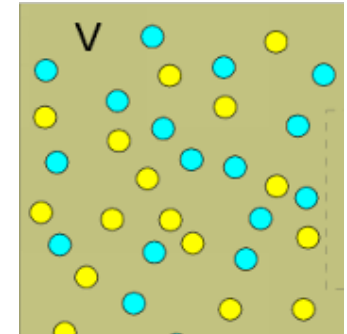
Exo 6: Gaz parfait - avec élégance!



- Ecart de fermeture: $w_1 = \ell_{P_1} \ell_{V_1} \ell_{T_2} - \ell_{V_2} \ell_{P_2} \ell_{T_1}$
 - taille dépend des unités
 - notre cas $mb, ml, K \dots$ $\approx 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^3 = 10^9$
 - dans une petite variation $= 1001 \cdot 10^3 \cdot 10^3 = 1001 \cdot 10^6$
 - différence $\approx 1 \cdot 10^6$ 👍

- ... plus grande variation $= 1020 \cdot 10^3 \cdot 10^3 = 1020 \cdot 10^6$
- différence $\approx 20 \cdot 10^6$ ⚠

Exo 6: Gaz parfait - avec élégance!



- Analogie avec la moyenne: 2 états $\rightarrow$ 5 états

- Combien de conditions ?
- Comment les choisir ?

$$\begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \\ \ell_4 \\ \ell_5 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \ell_2 - \ell_1 = w_1 \\ \ell_3 - \ell_2 = w_2 \\ \ell_4 - \ell_3 = w_3 \\ \ell_5 - \ell_4 = w_4 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & -1 & 1 & \cdot & \cdot \\ & & -1 & 1 & \cdot \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Puis-je le faire différemment ?
- Est-ce que ça donne les écarts des fermetures différentes ?
- Est-ce que ça donne des résidus différents ?



- Principe des moindres carrés
 - Définition: $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} \rightarrow \text{minimum}$
 - Exemple: la moyenne arithmétique, $\mathbf{P} = \mathbf{I}$
 - Présentation empirique
 - Démonstration analytique

- Exercice 7 en autocontrôle sur Moodle
 - Dérivation matricielle
 - Développer l'expression en scalaires
 - Dériver
 - Former des vecteurs et des matrices
 - Moyenne pondérée, $\mathbf{P} \neq \mathbf{I}$
 - Extension de la moyenne arithmétique

Prochaine fois: Ecarte-type a posteriori – lire Chap. 3.3